PROYECTO DE MECÁNICA:

Lanzamiento de un cohete y puesta en órbita de carga útil

Eduard Algar.
Claudia García.
María Planas.
Carla García.

Índice:

Información sobre el cohete.

Considerad un cohete de características similares a Saturno V. Para evitar que los tripulantes sufran aceleraciones excesivamente elevadas, cada una de las dos fases del cohete se divide en sub-fases, en las cuales disminuye el empuje de los motores (Thrust, T). Completad la siguiente tabla a partir de los datos que os proporcionamos para cada sub-fase.

(SUB) STAGE	M_{intial} (tones)	T_{initial} (s)	T_{final} (s)	T (MN)	u (m/s)	η = T/u
S 1.0	2970	0	135	36.00	2000	18000
S 1.1	54	135	150	30.00	2000	15000
S 2.0	315	150	440	4.00	4100	975,61
S 2.1	32,073	440	480	1.50	4100	365,85
S 2.2	1,739	550	550	0.74	4100	180,9

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}\,;\, \eta = \frac{T}{u} \rightarrow \left[\frac{N}{m/s}\right] \rightarrow \left[\frac{kg}{s}\right]$$

$$T = m \cdot a$$

$$M_f = M_i - \eta\Delta t$$

S_1.0

$$M_f = 2{,}97 \cdot 10^6 - \frac{3{,}6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^3}(135 - 0) = 5{,}4 \cdot 10^4 kg\,;\, \eta = 18 \cdot 10^3 kg/s$$

S_1.1

$$M_f = 54 \cdot 10^4 - \frac{30 \cdot 10^3}{2}(150 - 135) = 31{,}5 \cdot 10^4 kg\,;\, \eta = 15 \cdot 10^3 kg/s$$

S_2.0

$$M_f = 31{,}5 \cdot 10^4 - \frac{4 \cdot 10^3}{4{,}1}(440 - 150) = \frac{1315 \cdot 10^3}{41} kg\,;$$

$$\eta = 975{,}61 \cdot \frac{kg}{s}$$

S_2.1

$$M_f = \frac{1315 \cdot 10^3}{41} - \frac{1{,}5 \cdot 10^3}{4{,}1}(480 - 440) = \frac{715 \cdot 10^3}{41} kg \approx 1739'02 kg$$

$$\eta = 365{,}85\ kg/s$$

S_2.2

$$M_f = \frac{715 \cdot 10^3}{41} - \frac{740 \cdot 10^3}{4{,}1}(550 - 480) = 1{,}61756098 \cdot 10^5 *\,;$$

$$\eta = 180{,}9\ kg/s$$

* Payload del cohete

*Las masas finales calculadas en cada etapa corresponden a la masa inicial de las siguientes etapas

*De esta forma, la última masa final corresponde a la carga útil que comporta el Saturno V.

Lanzamiento de un cohete desde la superficie terrestre: Primera fase.

II.1 Evolución temporal de la aceleración, velocidad y posición durante la primera fase (sub-fases 1.0 y 1.1). Despreciad los efectos de Coriolis y la fricción con el aire.

Considera el lanzamiento del cohete, partiendo de velocidad nula (y suponiendo la Tierra en reposo). Utilizando el método de Euler para integración, determina la aceleración $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, *la velocidad* $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ *y la posición del cohete* $\vec{r} = (x, y, z)$ *en función del tiempo a lo largo de la primera fase. No deis los resultados en forma de tabla de valores numéricos, sino representándolos gráficamente.*

Representad gráficamente la trayectoria del cohete (z=z(x,y)).

Dad en una pequeña tabla los valores de $\vec{a}, \vec{v}$ *y* $\vec{r}$ *al final de la primera fase.*

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \;\; ; \;\; T - F_g = m \cdot \vec{a}$$

$$m \cdot \vec{a} = T\hat{k} - \frac{GMm}{d^2}\hat{k}$$

$$\frac{m}{m} \cdot \vec{a} = \frac{T}{m}\hat{k} - \frac{GMm}{d^2 m}\hat{k} \;;\; \vec{a} = \frac{T}{m}\hat{k} - \frac{GM}{d^2}\hat{k}$$

Sabemos que la masa va cambiando, por lo que sustituiremos m por la expresión:

$$M_f = M_i - \eta\Delta t$$

$$\vec{a} = \frac{T}{M_i - \eta\Delta t}\hat{k} - \frac{GM}{d^2}\hat{k}$$

En código, para este apartado, consideramos un lanzamiento perfectamente vertical y despreciamos las fuerzas ficticias y el arrastre: así pues, las componentes X e Y serán nulas al igual que sus velocidades y aceleraciones ya que las fuerzas externas solo actúan en el eje Z.

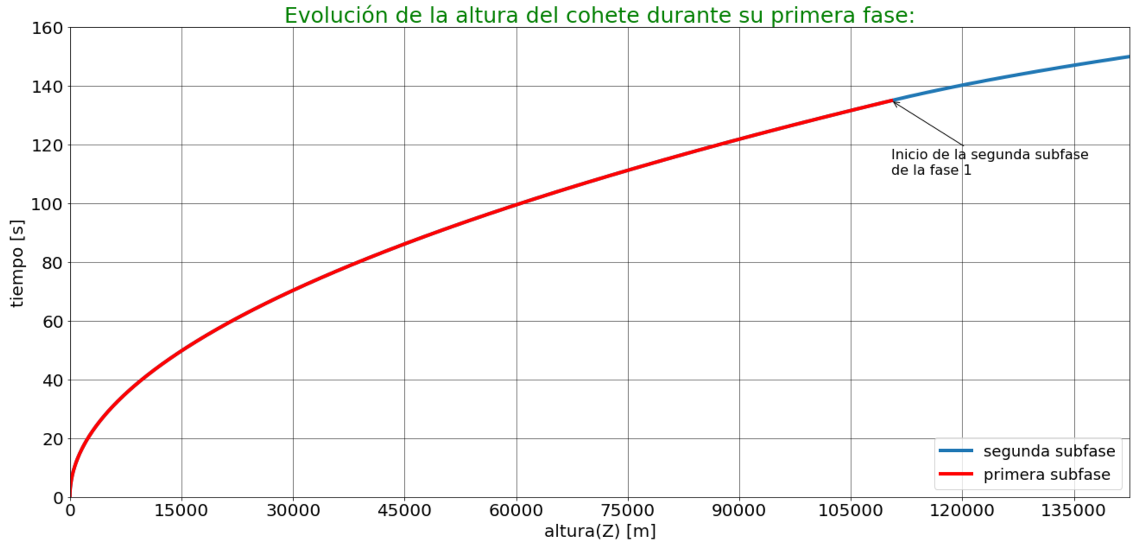


Figura 1. Evolución de la altura del cohete durante su primera fase.

En la gráfica de la figura 1 observamos que la altura evoluciona de manera parecida a un logaritmo empezando en cero, claro. En rojo muestra la primera sub-fase y en azul la segunda. Podemos sacar en conclusión que en un poco más de dos minutos sube una altura de 135 km.

La altura exacta que el cohete alcanza durante la primera sub-fase es de 110452.76033 m y en la segunda es de 142495.2538 m.

A continuación mostramos la trayectoria que describe el cohete y su proyección terrestre

Evolución temporal de la aceleración, velocidad y posición durante la primera fase (sub-fases 1.0 y 1.1). Considerad los efectos de Coriolis, pero despreciad la fricción con el aire.

Considera el lanzamiento del cohete, partiendo de velocidad nula (en el sistema de referencia de la Tierra en rotación). Utilizando el método de Euler para integración, representad gráficamente los nuevos valores para la aceleración $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$*, la velocidad* $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ *y la posición del cohete* $\vec{r} = (x, y, z)$ *en función del tiempo a lo largo de la primera fase. Suponed que el lanzamiento se realiza desde Cabo Cañaveral (US), de coordenadas latitud +28.5o, y longitud latitud -80.605o. Tened en cuenta el efecto Coriolis, pero no la fricción con el aire. Representad gráficamente la trayectoria del cohete (z=z(x,y)). Dad en una pequeña tabla los valores de* $\vec{a}$*,* $\vec{v}$ *y* $\vec{r}$ *al final de la primera fase.*

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$m \cdot \vec{a} = T\hat{k} - \frac{GMm}{d^2}\hat{k} + 2m(\vec{v}\wedge\vec{w})$$

$$\frac{m}{m} \cdot \vec{a} = \frac{T}{m}\hat{k} - \frac{GMm}{d^2 m}\hat{k} + \frac{2m}{m}(\vec{v}\wedge\vec{w}) \; ; \qquad \vec{a} = \frac{T}{m}\hat{k} - \frac{GM}{d^2}\hat{k} + 2(\vec{v}\wedge\vec{w})$$

$$2w\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ -cos\lambda & 0 & sin\lambda \end{vmatrix} = 2w\left[\hat{\imath}sin\lambda v_y - \hat{\jmath}(cos\lambda v_z + sin\lambda v_x) + \hat{k}cos\lambda\hat{k}v_y\right]$$

$$\vec{a} = \frac{T}{m}\hat{k} - \frac{GM}{d^2}\hat{k} + 2\left[\hat{\imath}v_y sin\lambda - \hat{\jmath}(cos\lambda v_z + sin\lambda v_x) + \hat{k}cos\lambda\hat{k}v_y\right]$$

$$a_x = 2wv_y sin\lambda$$

$$a_y = -2w(\cos(\lambda)\, v_z + \sin(\lambda)\, v_x)$$

$$a_z = -\frac{GM}{d^2} + \frac{T}{m} + 2wv_y\cos(\lambda)$$

En este apartado procedemos de la misma forma que en el ejercicio anterior, suponiendo un lanzamiento totalmente vertical. No obstante, al analizar el problema con un sistema de referencia no inercial, aparece el efecto de Coriolis (despreciamos la fuerza centrífuga al tratarse de un orden muy pequeño en comparación con otras fuerzas). Despreciaremos la fuerza de fricción.

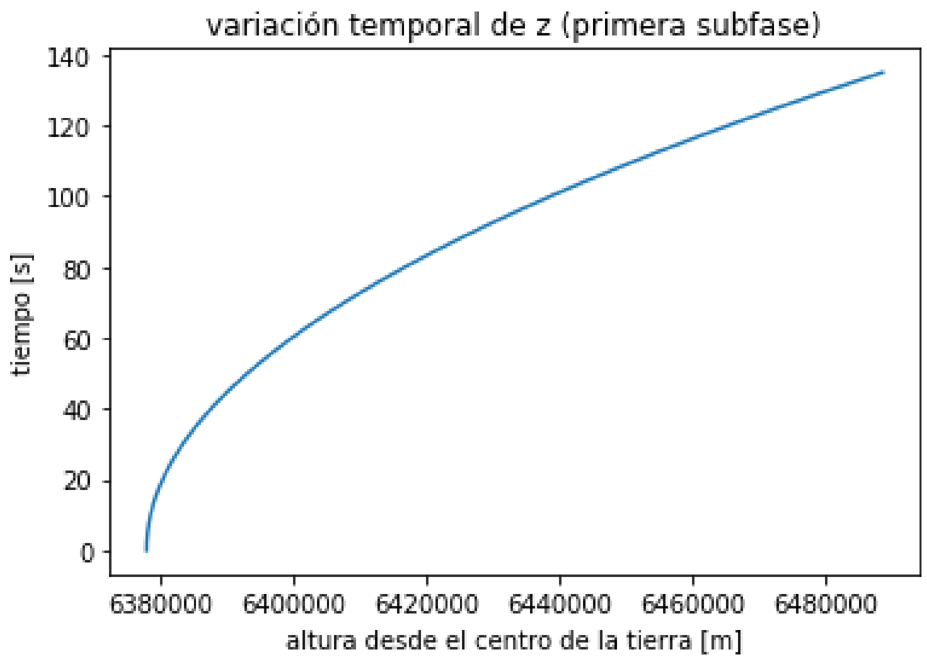


Figura 2. Variación temporal de z

La figura 2 nos muestra la gráfica de z en función del tiempo. Podemos ver que en un poco más de dos minutos, el cohete se eleva unos 109km (hay que tener en cuenta que el grafico está hecho desde el centro de la Tierra, por lo que debemos restárselo para saber la altura a la que llega desde la superficie), un poco menos que sin Coriolis.

La altura máxima que alcanza, según nuestro código en la primera sub-fase es de 110450.6792 m y en la segunda es de 142353.7801 m

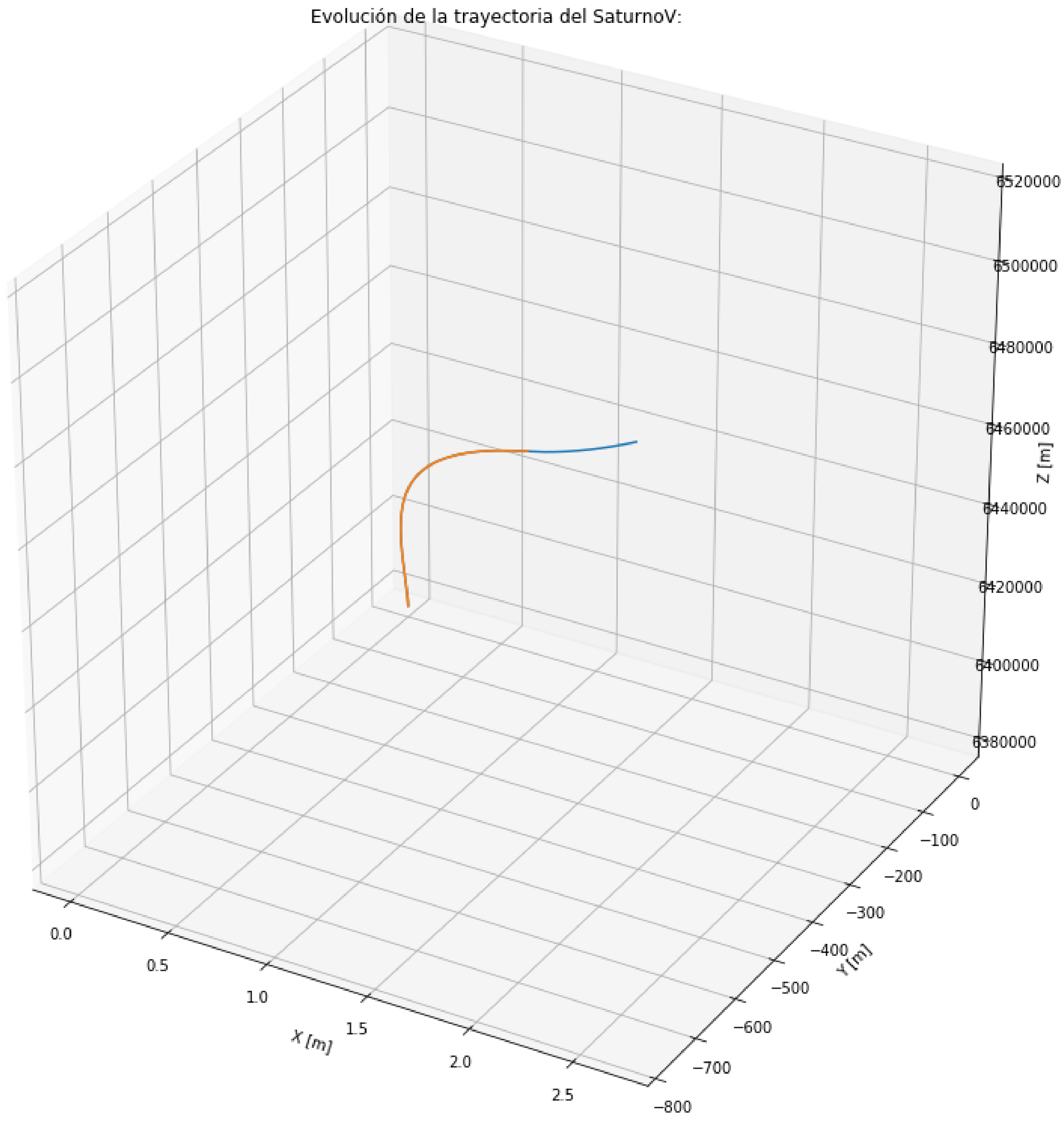


Figura 3. Evolución de la trayectoria del SaturnoV.

Evolución temporal de la aceleración, velocidad y posición durante la primera fase (sub-fases 1.0 y 1.1). Considerad los efectos de Coriolis y la fricción con el aire.

Considera el lanzamiento del cohete, partiendo de velocidad nula (en el sistema de referencia de la Tierra en rotación). Utilizando el método de Euler para integración, representad gráficamente los nuevos valores para la aceleración $\vec{a}$, la velocidad $\vec{v}$ y la posición del cohete $\vec{r}$ en función del tiempo a lo largo de la primera fase. Suponed que el lanzamiento se realiza desde Cabo Cañaveral (US), y tened en cuenta el efecto de la fricción con el aire. Para ello consideraremos un modelo de fuerza de fricción $F = b|\vec{v}|\vec{v}$, con $b = 0{,}5C_d\,\rho$, donde A es el área, C_d es el coeficiente de drag, y ρ es la densidad atmosférica. Simplificando en exceso, supondremos que el producto $AC_d = 200\ m^2$ es constante y válido para todos los ejes. ρ frente a la altura sobre la superficie terrestre viene dada según el modelo de atmósfera estándar, con la altura sobre la superficie terrestre, h, dada en metros:

- *For height* $0 \leq h \leq 11$km: $\rho = 1{,}225000\ (1 - \frac{6{,}5\ x\ 10^{-3} h}{288{,}16})^{4{,}259645}$
- *For height* $11\text{km} \leq h \leq 25$km: $\rho = 0{,}3642050\ e^{-1{,}57603x10^{-4}(h-11000)}$
- *For height* $25\text{km} \leq h \leq 47$km: $\rho = 4{,}0095739x10^{-2}(1 + \frac{3\ x\ 10^{-3}(h-25000)}{216{,}66})^{-12{,}38211}$

Representad gráficamente la trayectoria del cohete (z=z(x,y)).

Dad en una pequeña tabla los valores de $\vec{a}$, $\vec{v}$ y $\vec{r}$ al final de la primera fase.

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$m \cdot \vec{a} = T\hat{k} - \frac{GMm}{d^2}\hat{k} + 2m(\vec{v}\Lambda\vec{w}) - - b|\vec{v}|v$$

$$\frac{m}{m} \cdot \vec{a} = \frac{T}{m}\hat{k} - \frac{GMm}{d^2 m}\hat{k} + \frac{2m}{m}(\vec{v}\Lambda\vec{w}) - \frac{b}{m}|\vec{v}|v \ ; \ \vec{a} = \frac{T}{m}\hat{k} - \frac{GM}{d^2}\hat{k} + 2(\vec{v}\Lambda\vec{w}) - \frac{b}{m}|\vec{v}|v$$

$$2w\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ -cos\lambda & 0 & sin\lambda \end{vmatrix} = 2w\left[\hat{\imath}sin\lambda v_y - \hat{\jmath}(cos\lambda v_z + sin\lambda v_x) + \hat{k}cos\lambda\hat{k}v_y\right]$$

$$\vec{a} = \frac{T}{m}\hat{k} - \frac{GM}{d^2}\hat{k} + 2\left[\hat{\imath}v_y sin\lambda - \hat{\jmath}(cos\lambda v_z + sin\lambda v_x) + \hat{k}cos\lambda\hat{k}v_y\right] - \frac{b}{m}|\vec{v}|v$$

$$a_x = 2wv_y sin\lambda - \frac{b}{m}|\vec{v}|v_x$$

$$a_y = -2w(\cos(\lambda)\, v_z + \sin(\lambda)\, v_x) \; - \frac{b}{m}|\vec{v}|v_y$$

$$a_z = -\frac{GM}{d^2} + \frac{T}{m} + 2wv_y\cos(\lambda) - \frac{b}{m}|\vec{v}|v_z$$

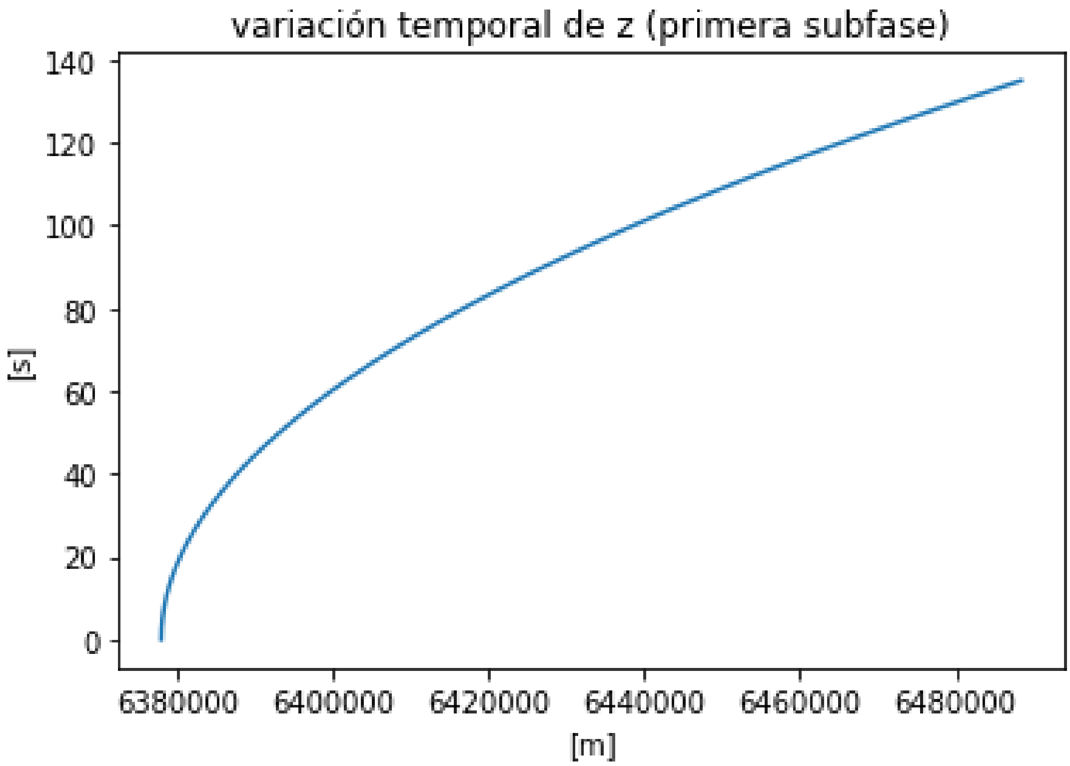


Figura 4. Variación temporal de z

En este caso, ya medimos la elevación del cohete teniendo en cuenta el efecto Coriolis y la fricción. Vemos en la figura 4 que este sube hasta una altura muy similar a la que habíamos obtenido midiendo solo con el efecto Coriolis. Por lo tanto, podemos deducir que la fuerza de rozamiento que actúa es muy pequeña.

La altura máxima exacta que alcanza, según nuestro código en la primera sub-fase es de 110399.7308 m Y en la segunda de 117575.59392 m

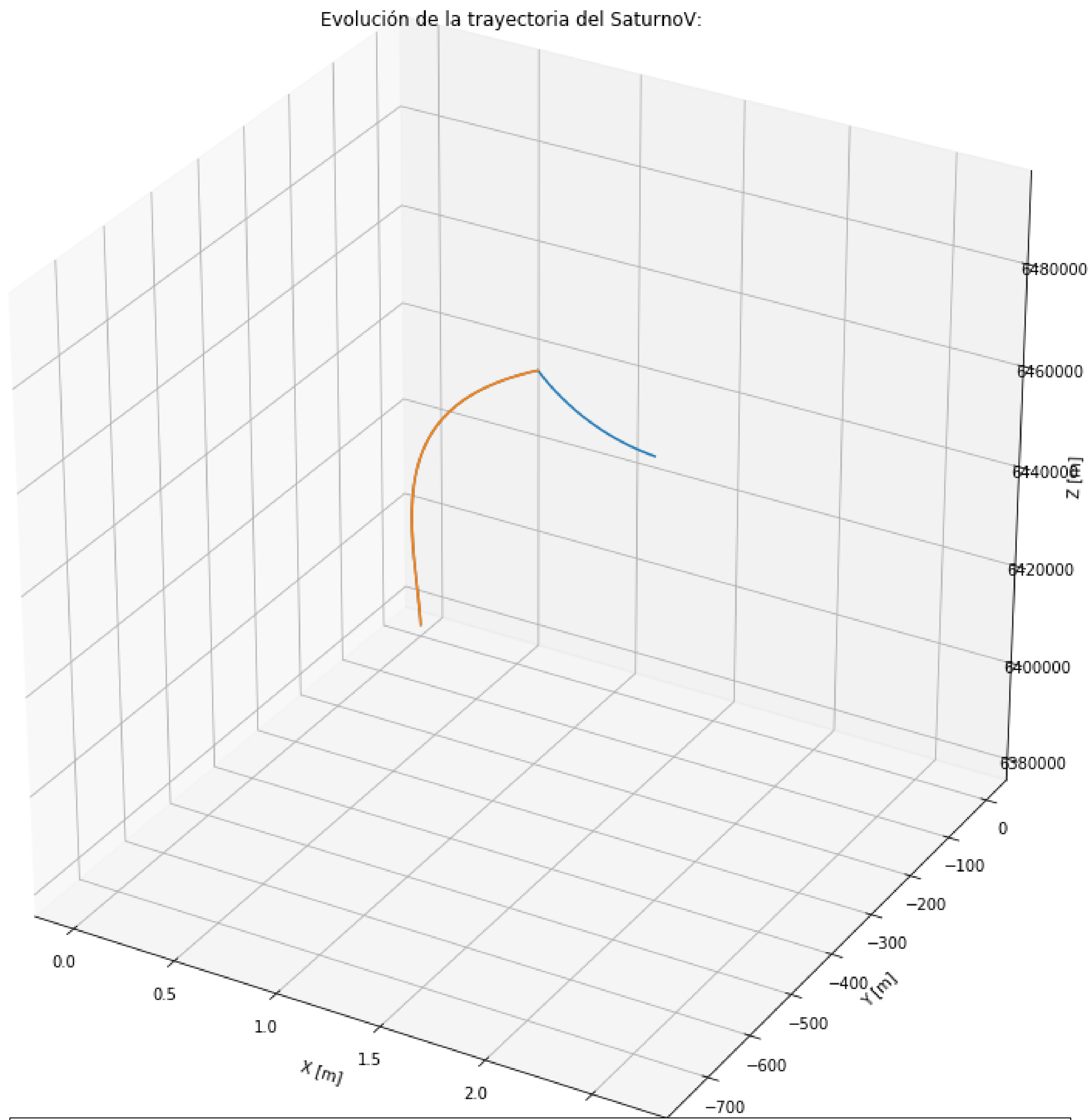


Figura 5. Evolución de la trayectoria del Saturno V

II.4 Comparación de resultados

Comparad los resultados obtenidos en los anteriores apartados y analizad los efectos de la aceleración por Coriolis y la fricción con el aire.

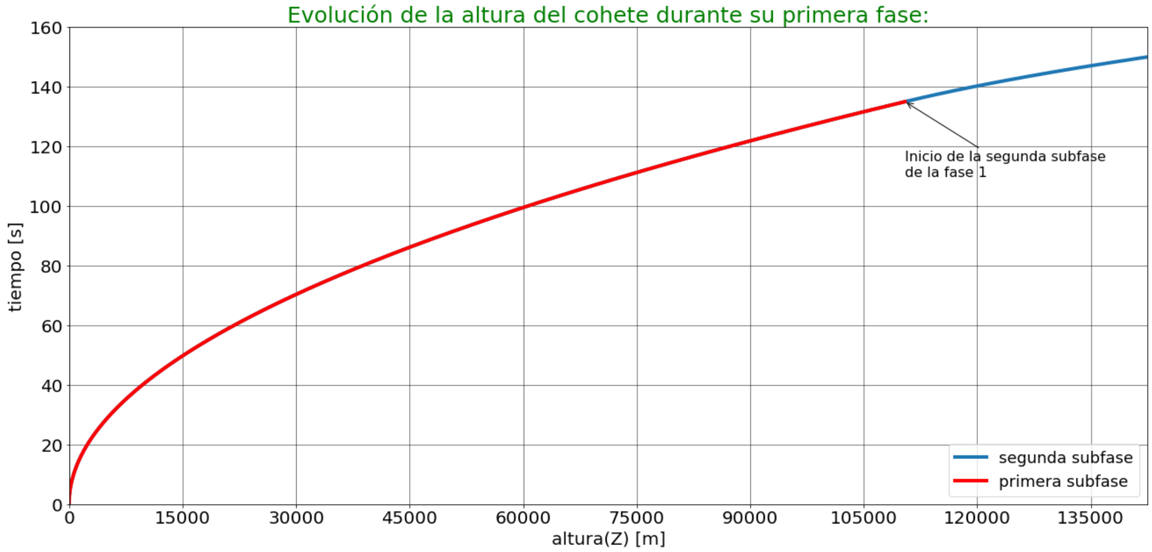


Figura 6. Evolución de la altura del cohete durante su primera fase.

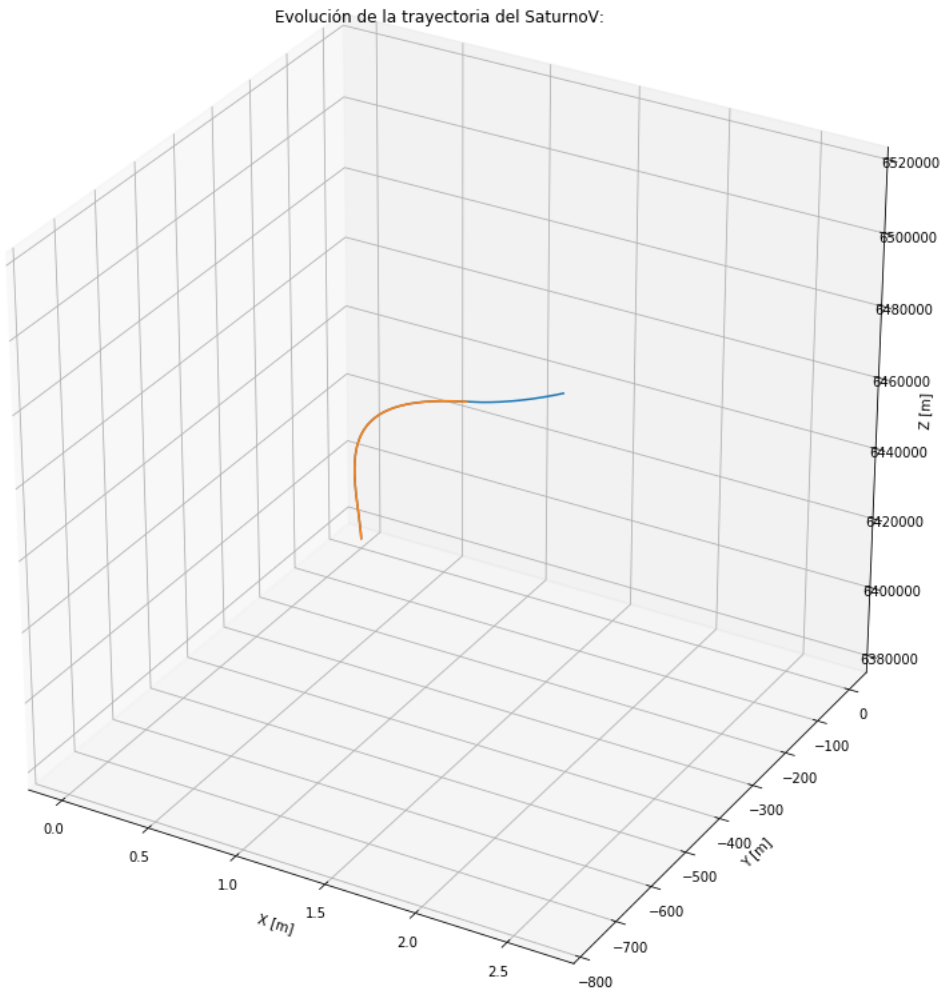


Figura 7. Evolución de la trayectoria bajo el efecto Coriolis.

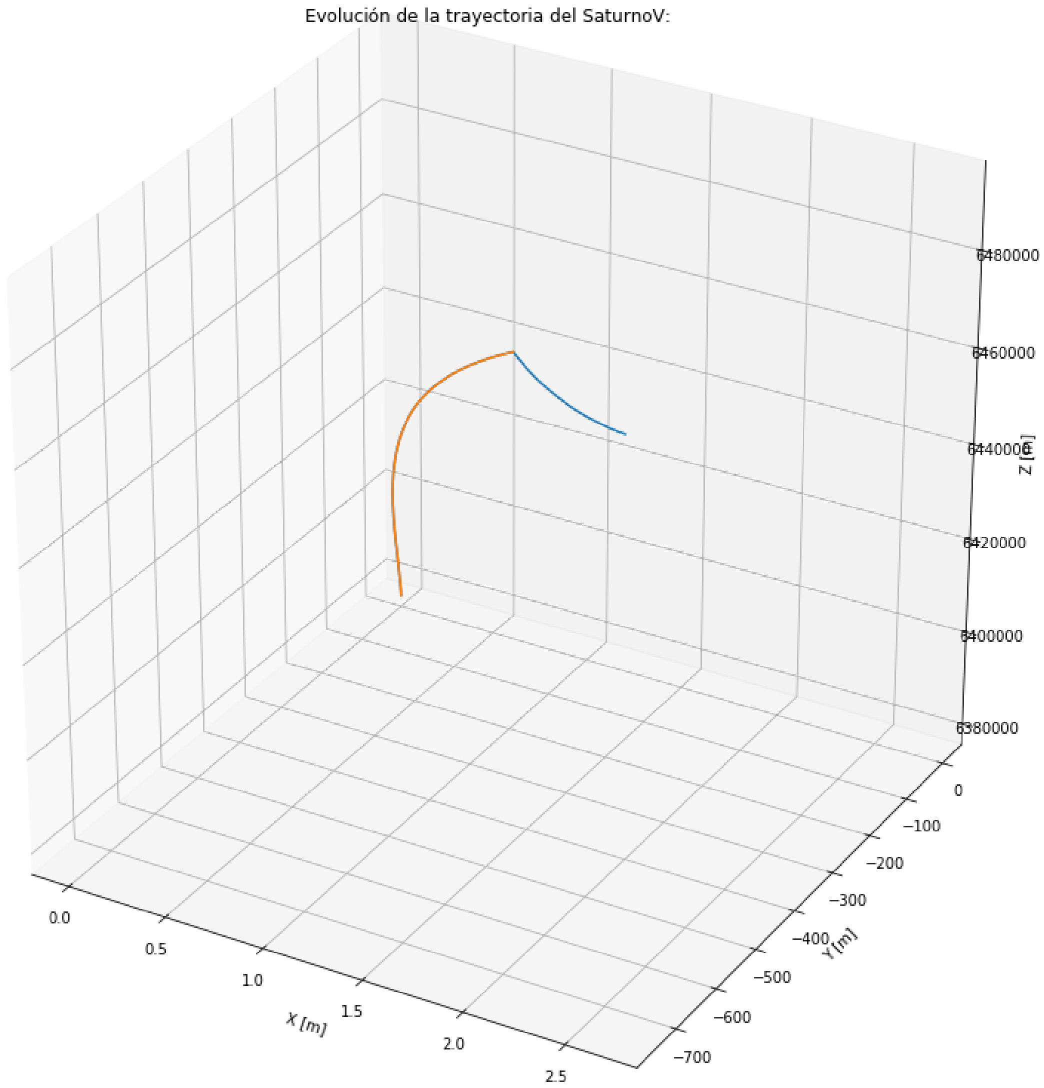


Figura 8. Evolución de la trayectoria bajo el efecto Coriolis y el rozamiento.

En las anteriores graficas podemos ver que la trayectoria de nuestro cohete varía según añadimos el efecto de Coriolis primero (Figura 7) y el rozamiento (Figura 8) respecto de la primera calculada sin ninguna de esas consideraciones (Figura 6). La trayectoria deja de tener una tendencia lineal/exponencial y empieza a decaer.

Caída de componente.

Si al final de la primera fase se desprende una pieza de 100 kg, determinad el lugar (coordenadas) de la Tierra donde caería.

En este apartado, realizamos un código muy parecido para ver la variación de la posición des de que termina la fase hasta que la capsula impacta en la superficie terrestre. Los cálculos obtenidos muestran que, sin rozamiento, la variación en XY es de aproximadamente, 2.6m lo que, al pasar a coordenadas terrestres, es casi despreciable. Por este motivo usamos como una aproximación valida la que el en las primeras etapas (el Thrust solo tiene componente Z) las capsulas caen de forma vertical con apenas desviación. Lo que nos lleva a proponer como respuesta, las posiciones obtenidas en los scripts anexados para generar los archivos kml. Así pues, el punto donde termina la fase, es prácticamente el mismo en el cual la cápsula colisiona. En el anexo se puede encontrar todo el código que ha calculado las coordenadas.

Esto aún sería más claro con el efecto del rozamiento el cual también frenaría las desviaciones laterales durante su caída libre.

Lanzamiento de un cohete desde la superficie terrestre: Segunda fase.

Evolución temporal de la aceleración, velocidad y posición durante la segunda fase (subfases 2.0, 2.1 y 2.2)

Despreciamos el arrastre, ya que la densidad del aire según el modulo estándar atmosférico de 1976, a 86 km, $\rho \approx 5.64 \cdot 10^{-6}$ kg·m^{-3}, así pues, a 11,4 km que es donde terminamos la primera fase, $\rho \approx 0$ kg/m^3.
Tenemos que tener en cuenta los efectos de fuerzas ficticias, ya que tanto el cohete, como la Tierra son objetos acelerados y por tanto no es posible construir un sistema de referencia inercial. Tampoco podemos usar otros astros (Luna, Sol) por el mismo motivo (están acelerados).

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\cancel{m} \cdot \vec{a} = \frac{T}{m}\hat{k} - \frac{GM\cancel{m}}{d^2}\hat{k} - 2\cancel{m}(\vec{v} \wedge \vec{w})$$

$$a_x = \frac{T_2}{m} \cdot (sin\alpha_1) \cdot (cos\alpha_2) + 2\omega \cdot V_y \cdot \sin(\gamma)$$

$$a_y = -2\omega \cdot (\cos(\gamma) \cdot V_z + V_x \cdot \sin(\gamma)) + \frac{T_2}{m} \cdot (\sin(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2))$$

$$a_z = \frac{-GM}{d^2} + \frac{T}{m} \cdot \cos(\alpha_1) + 2\omega V_y \cdot \cos(\gamma)$$

A continuación, añadiremos todas las gráficas obtenidas mediante código que describen desde la trayectoria, velocidad y aceleración en todos los ejes en todas las sub-fases y después, una breve relación comparativa ente las aceleraciones y la trayectoria final obtenida de nuestro cohete Saturno V.

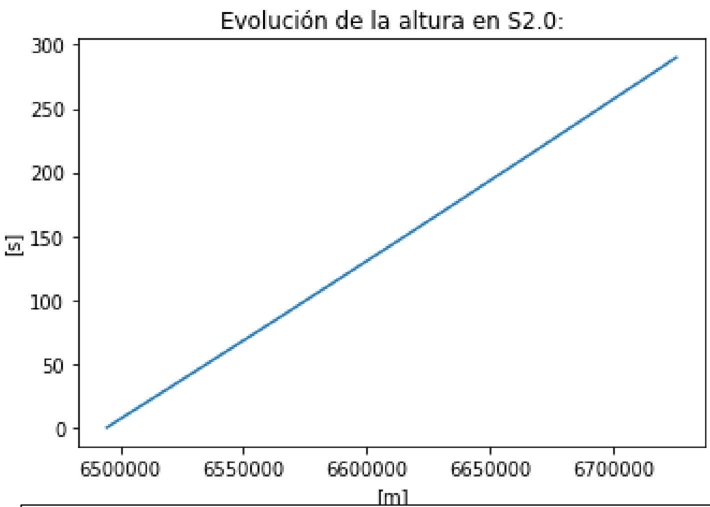


Figura 9. Evolución de la altura en S2.0

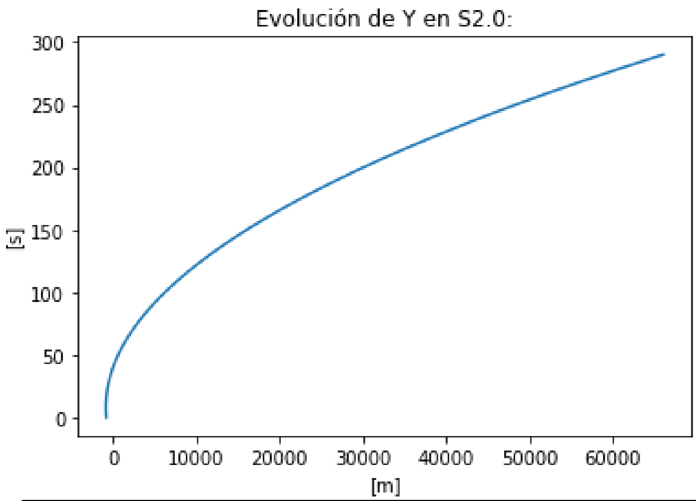


Figura 10. Evolución de Y en S2.0

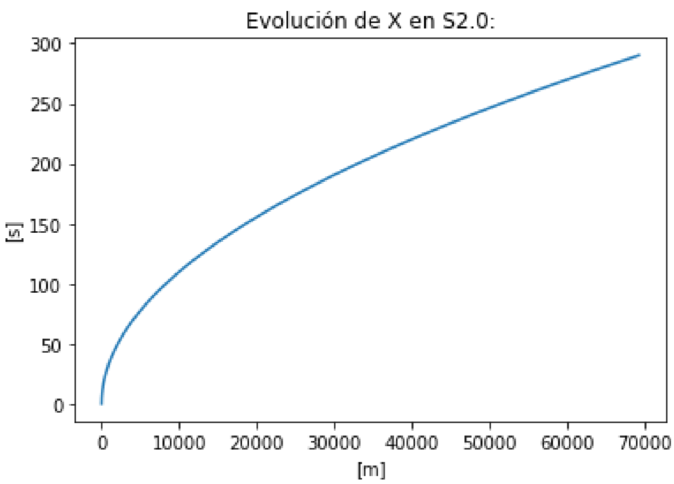


Figura 11. Evolución de X en S2.0

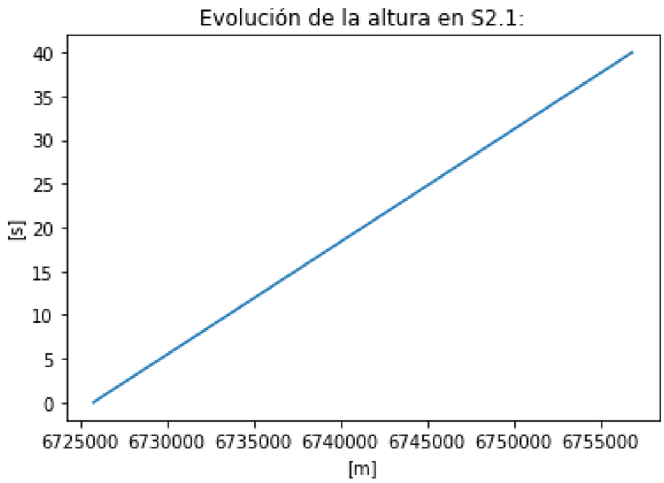


Figura 12. Evolución de la altura en S2.1

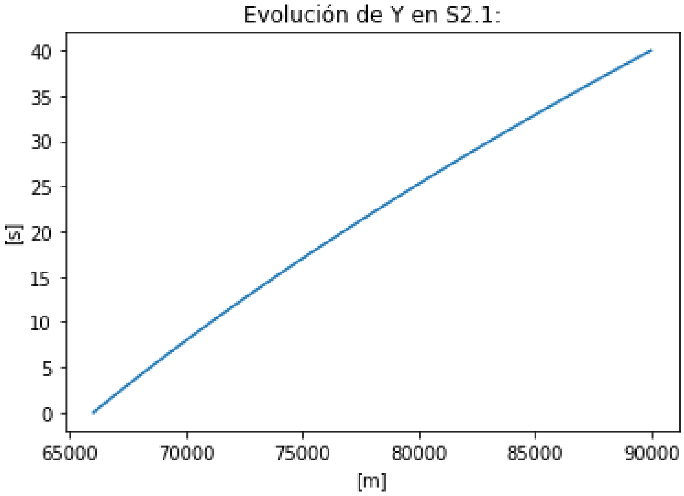


Figura 13. Evolución de Y en S2.1

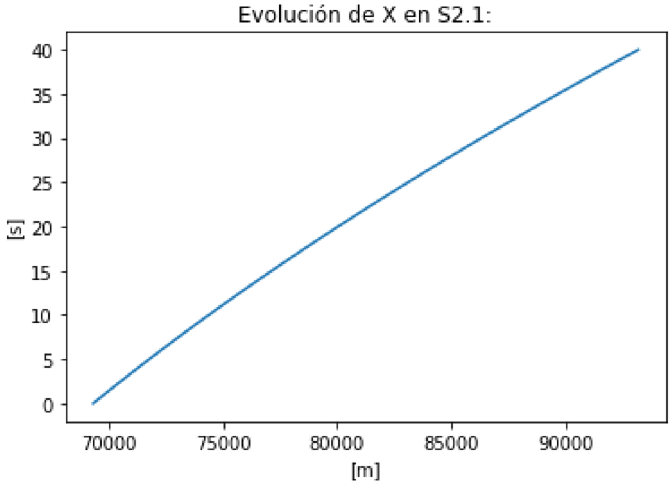


Figura 14. Evolución de X en S2.1

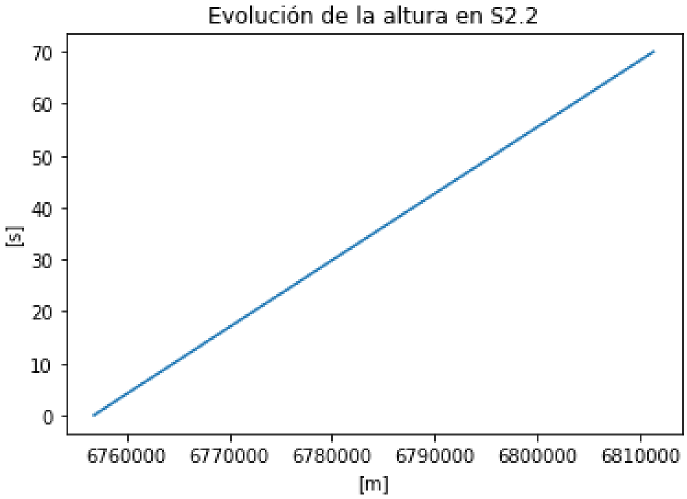


Figura 15. Evolución de la altura en S2.2

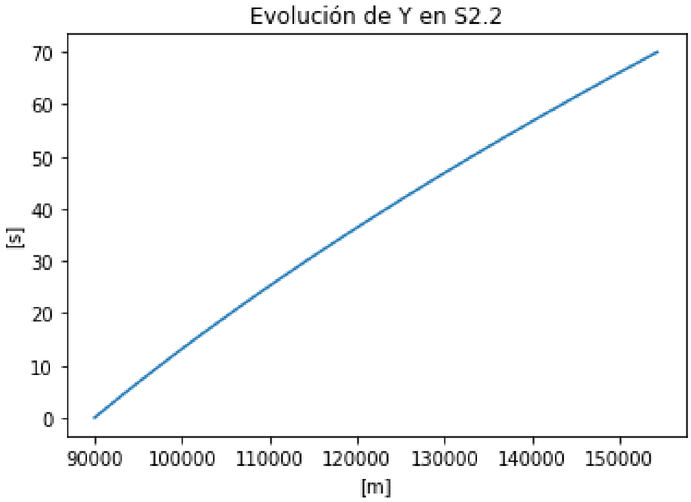


Figura 16. Evolución de Y en S2.2

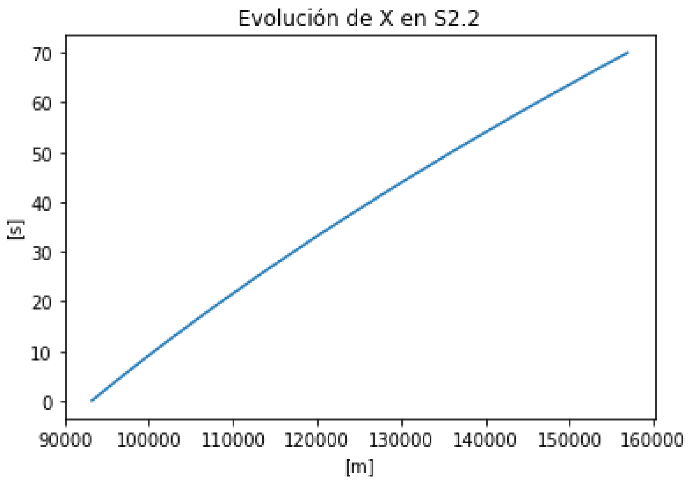


Figura 17. Evolución de X en S2.2

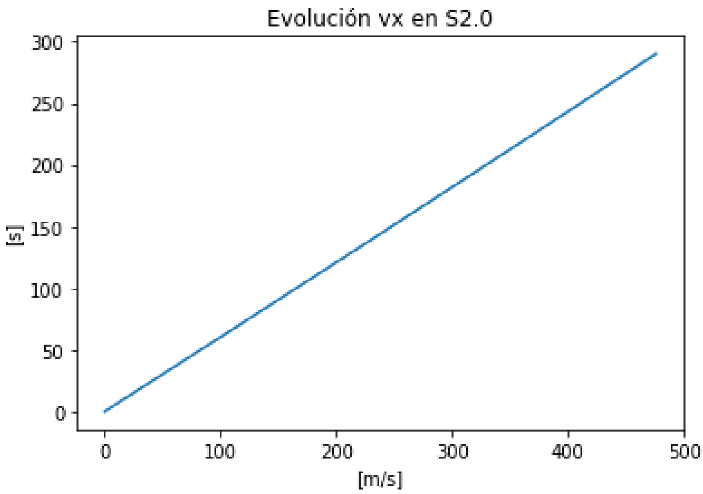


Figura 18. Evolución de V_x en S2.0

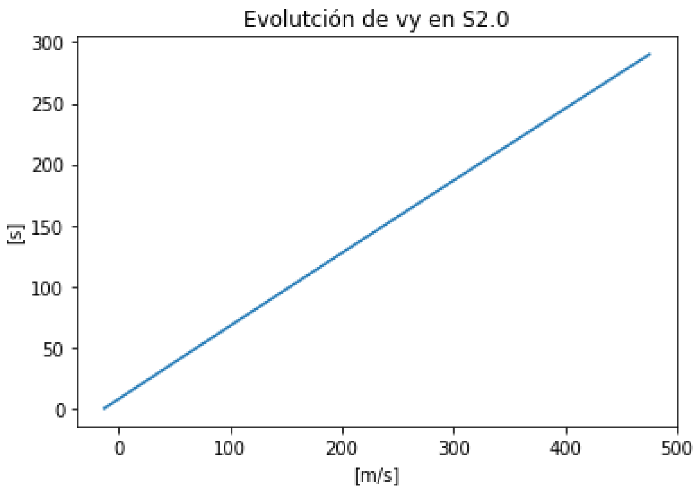


Figura 19. Evolución de V_y en S2.0

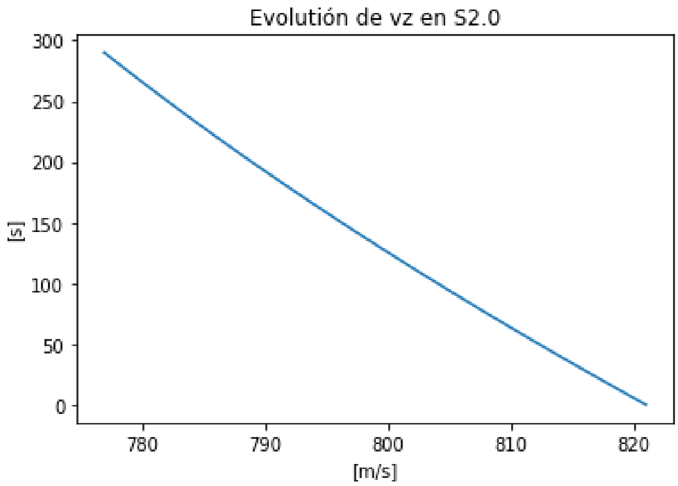


Figura 20. Evolución de V_z en S2.0

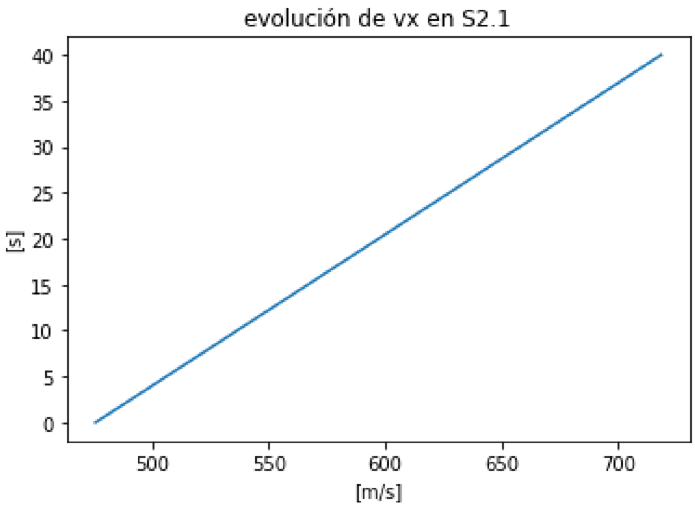


Figura 21. Evolución de V_x en S2.1

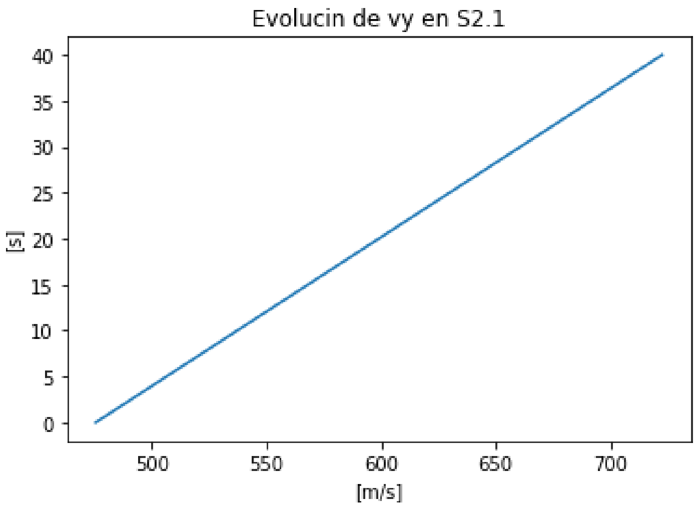


Figura 22. Evolución de V_y en S2.1

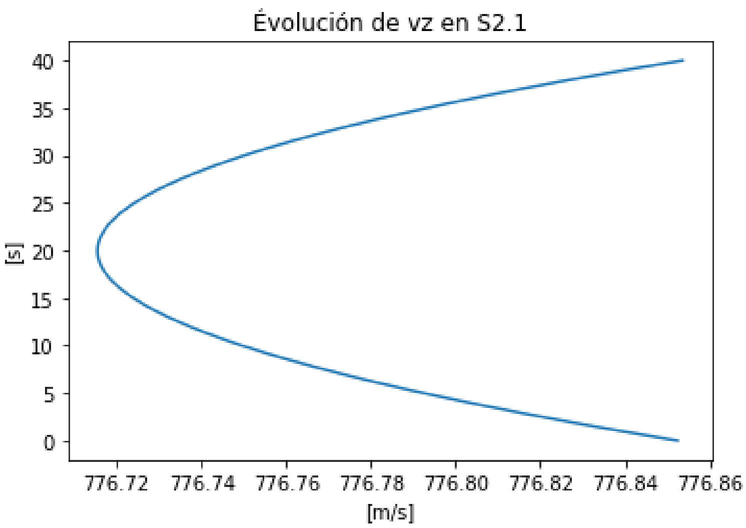


Figura 23. Evolución de V_z en S2.1

Figura 24. Evolución de V_x en S2.2

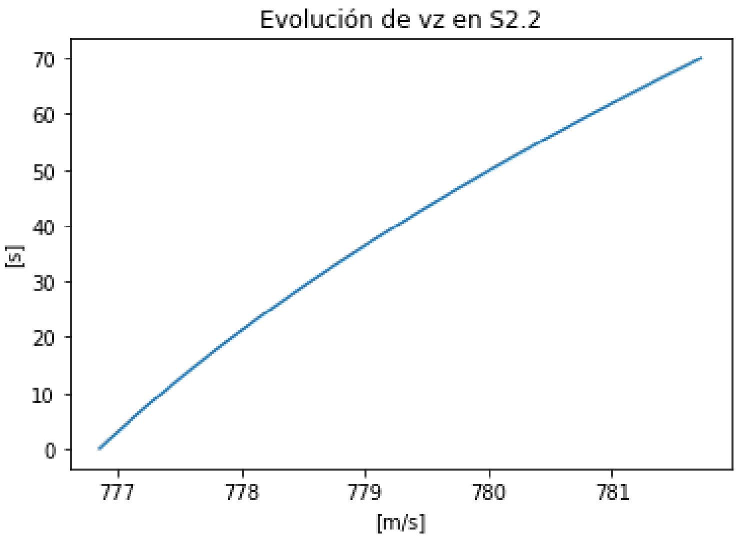


Figura 25. Evolución de V_z en S2.2

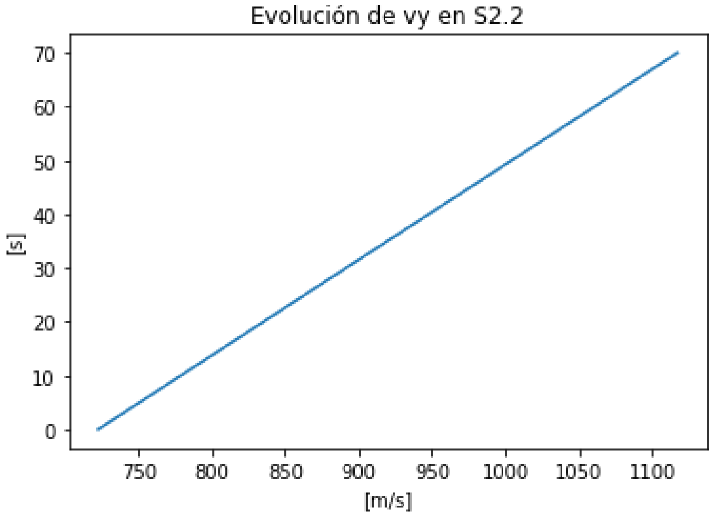


Figura 26. Evolución de V_y en S2.2

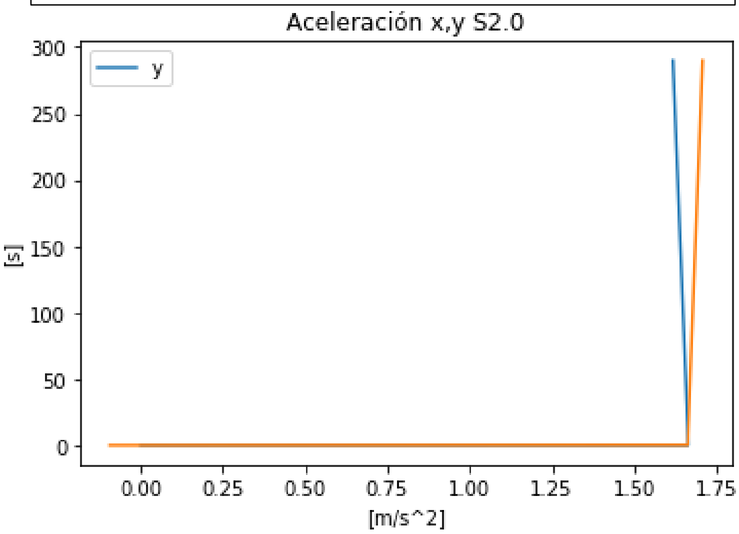


Figura 27. Aceleración en x, y en S2.0

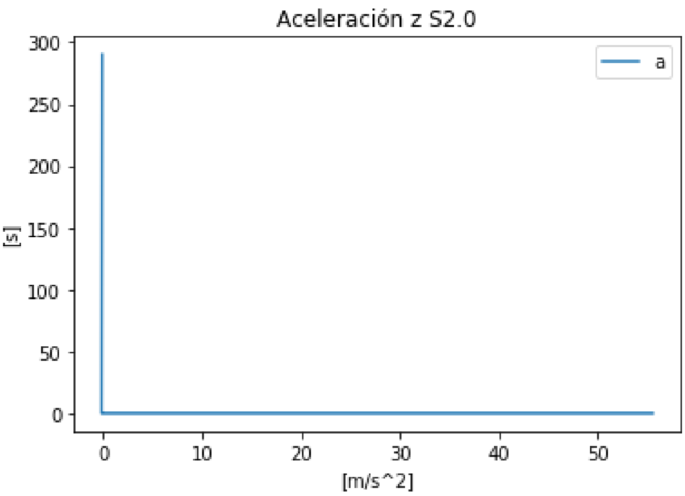


Figura 28. Aceleración en z en S2.0

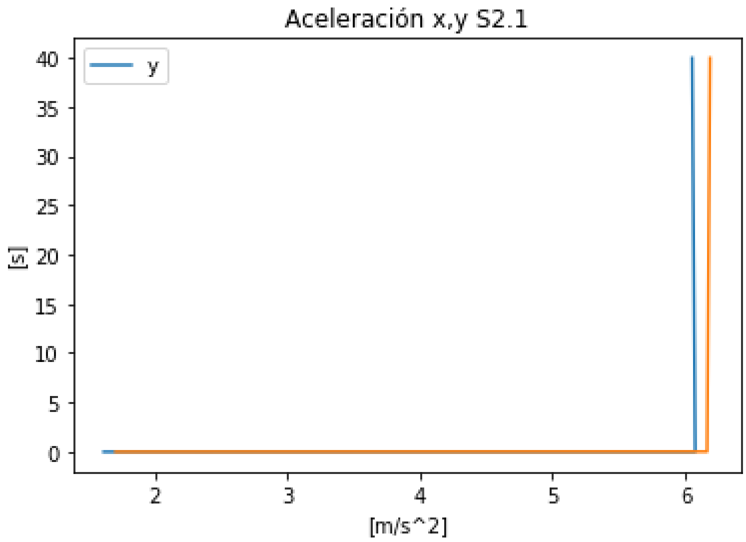


Figura 29. Aceleración en x, y en S2.1

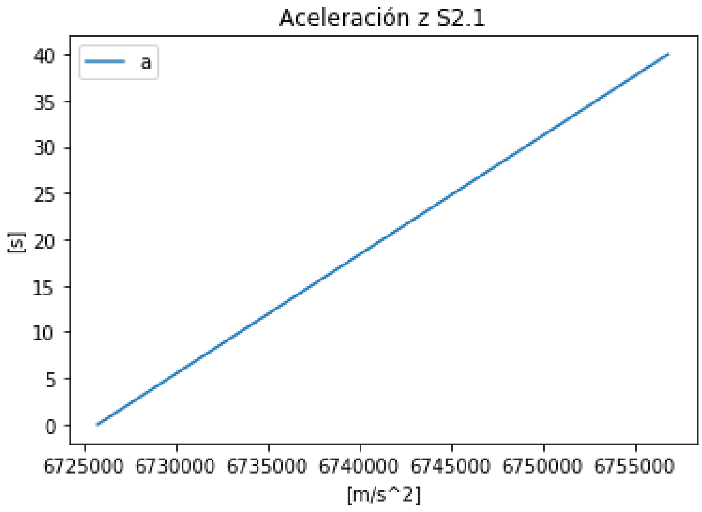


Figura 30. Aceleración en z en S2.1

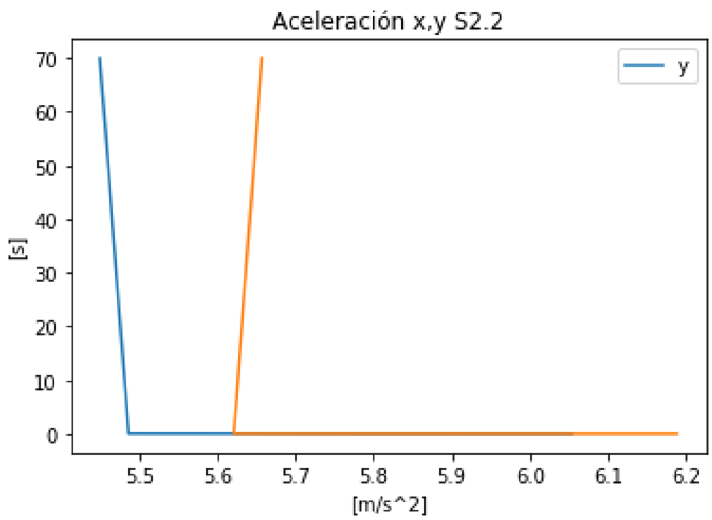


Figura 31. Aceleración en x, y en S2.2

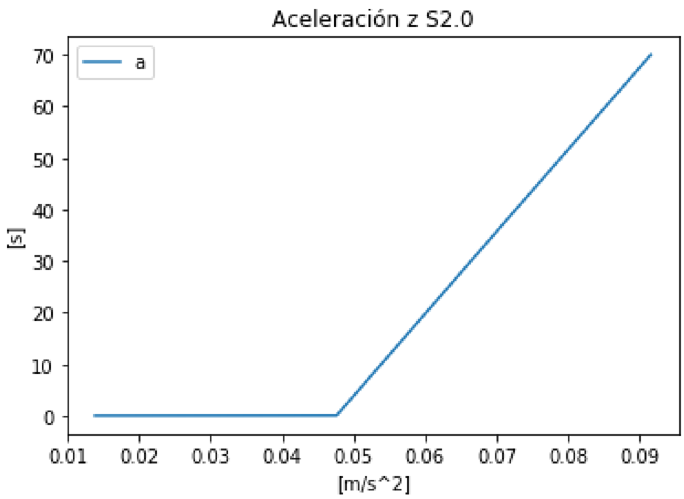


Figura 33. Aceleración en z en S2.0

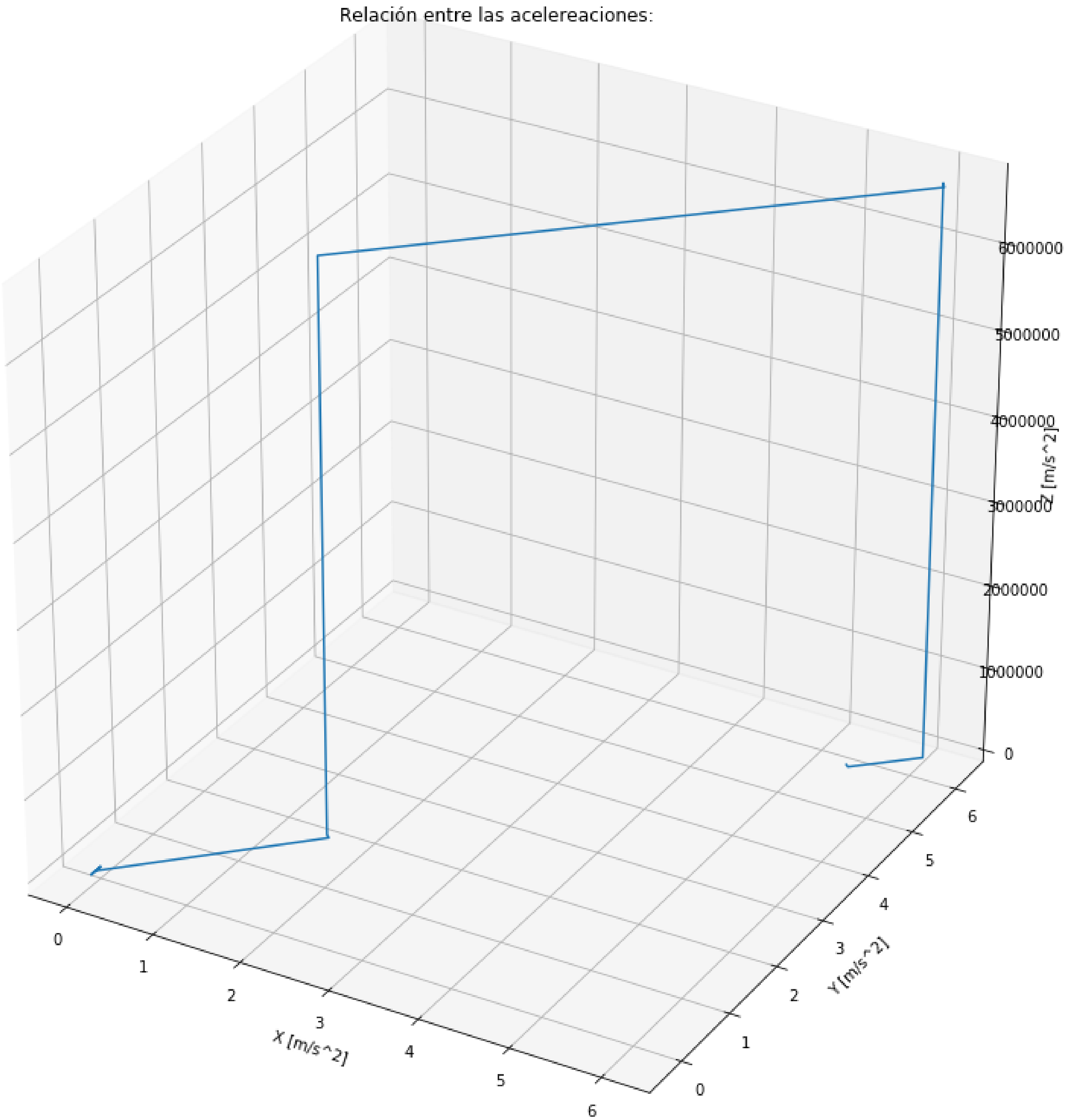


Figura 34. Relación entre las aceleraciones

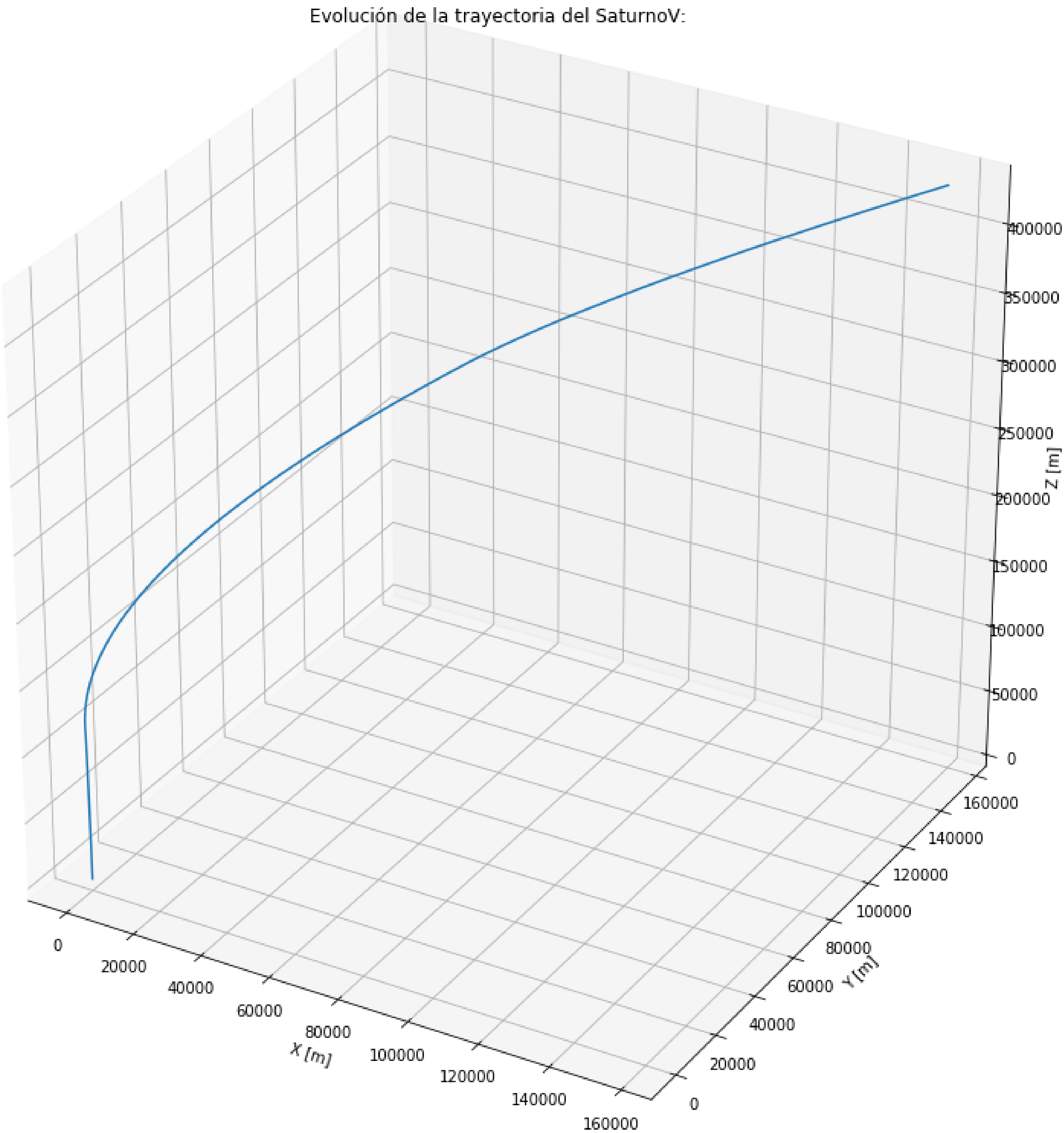
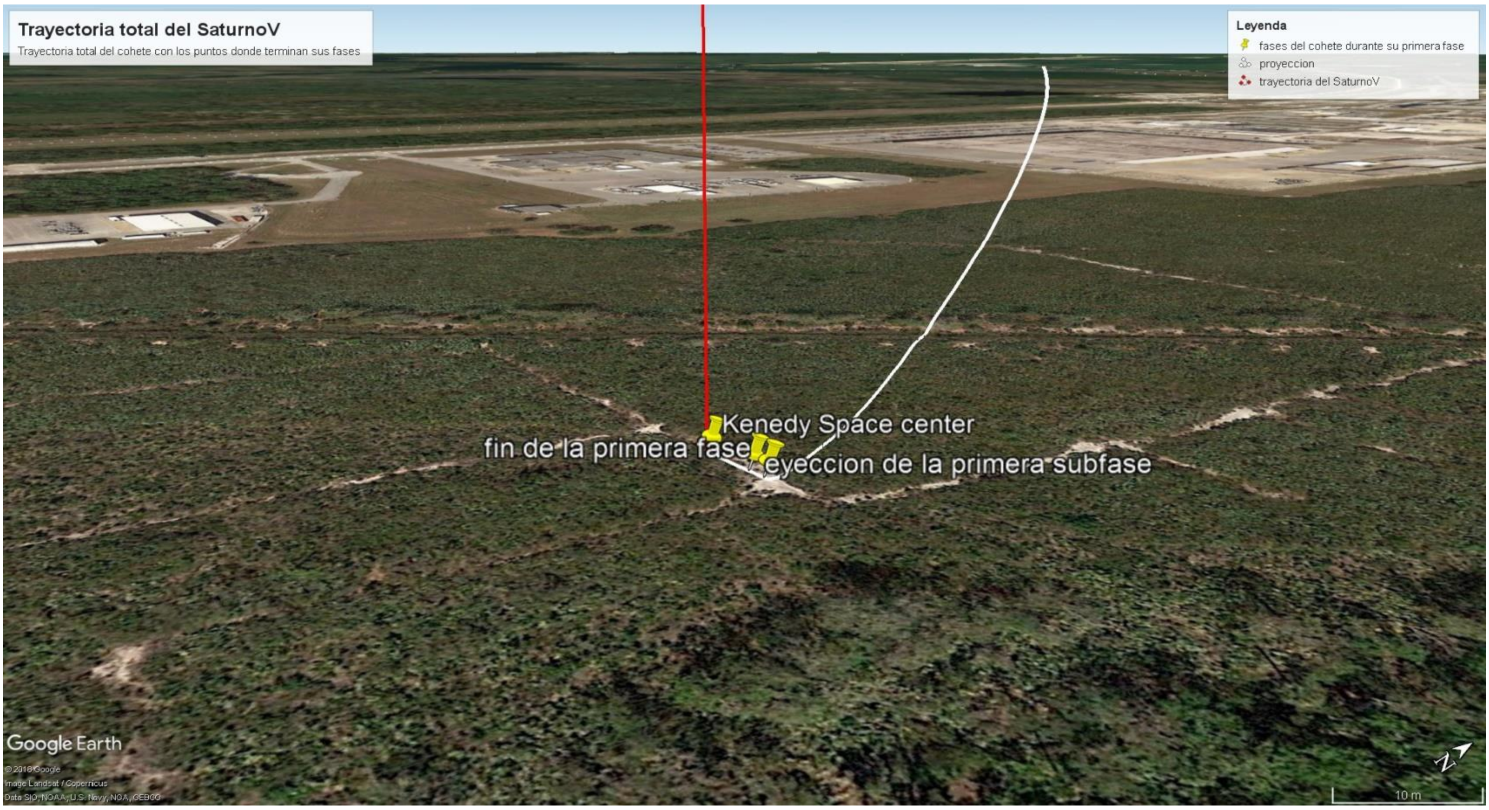
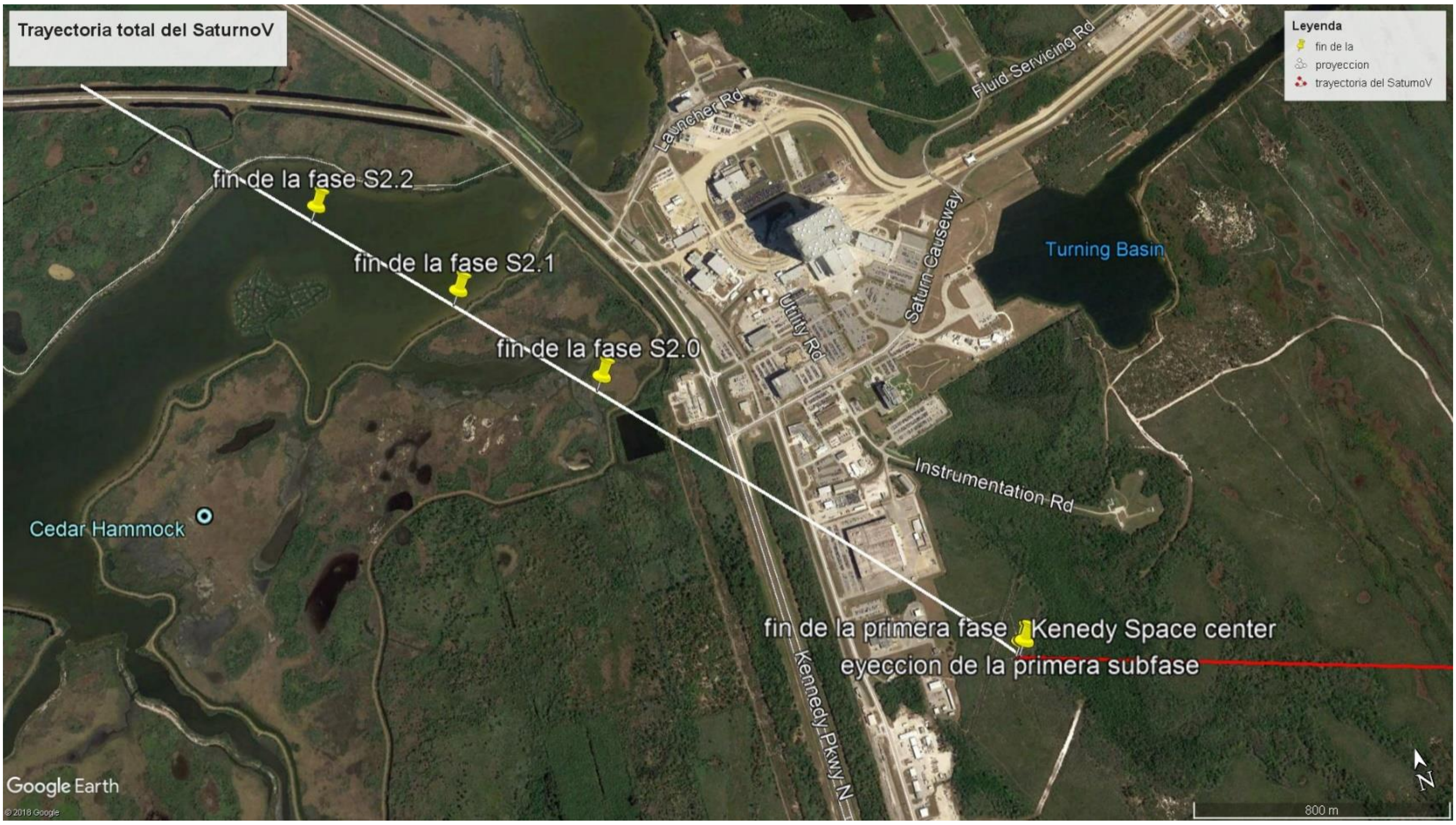
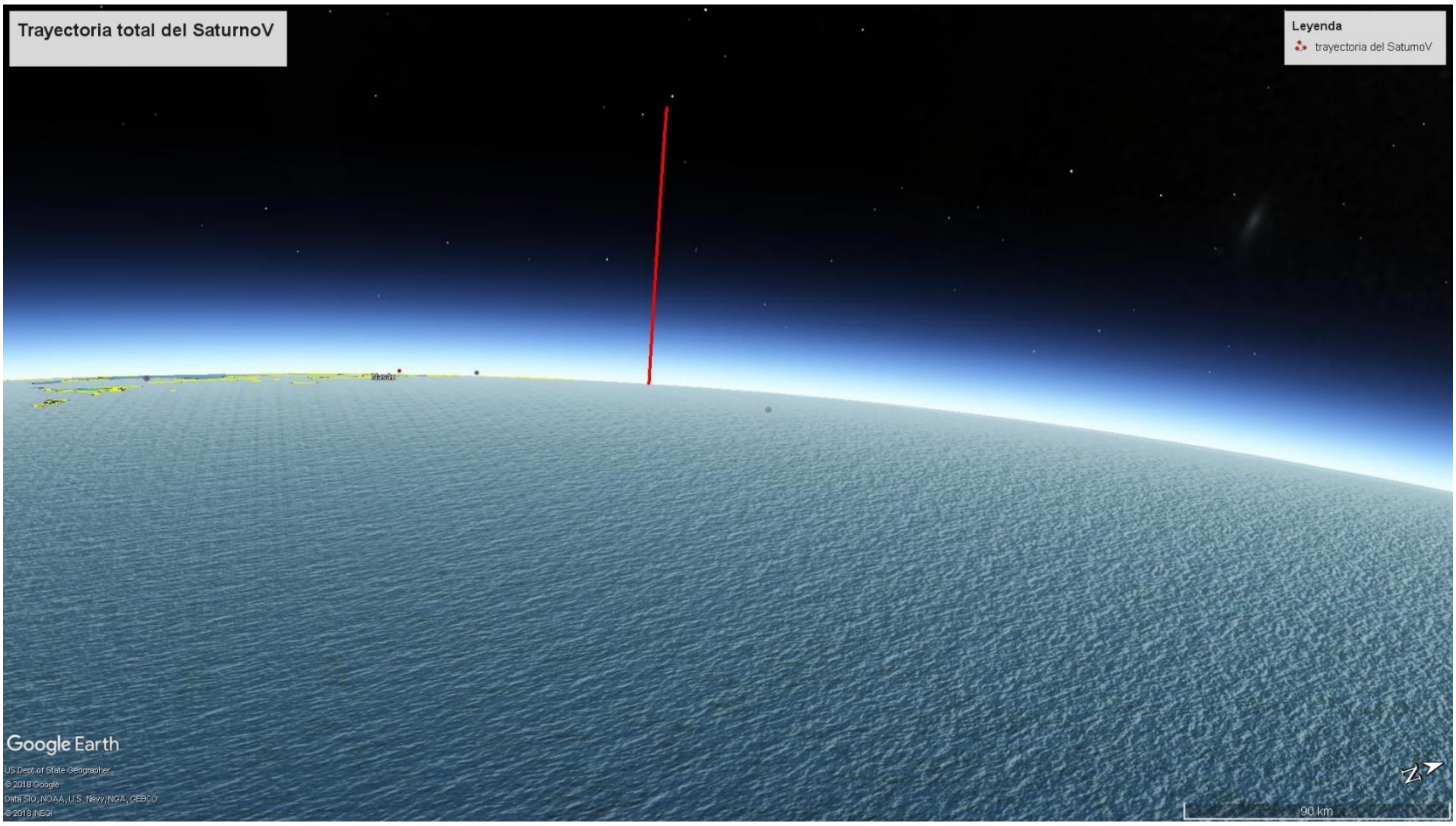


Figura 35. Evolución de la trayectoria del Saturno V

Trayectoria del cohete:







Orbita de la carga útil.

Representad en coordenadas ecuatoriales la trayectoria final de la carga útil, correspondiente a la masa final tras la segunda fase. ¿Es una órbita ligada? ¿Es una órbita factible?
Determinad su perigeo, apogeo e inclinación.

Realizamos un cambio de coordenadas par así obtener el vector posición y velocidad necesarios para poder calcular E y L, los cuales nos permitirán obtener los parámetros orbitales. Usaremos una matriz de rotación para realizar el cambio de coordenadas a un sistema de referencia centrado en el centro de la Tierra el cual lo consideramos inercial.

En la primera sub-fase de la primera fase, el cohete llega a una altura de 110399.7308 m. Durante la segunda fase, alcanza una altura máxima en la primer sub-fase de 347768.6935 m, en la segunda sub-fase de 378838.3692 m y en la tercera de 433369.7677 m.

La energía total orbital es de 1648193.6320264176 J.

El cohete tiene una excentricidad de $7.015145509942754 \cdot 10^{27}$ y una a de 1.0 m

La distancia máxima a la que llega cuando la velocidad es cercana a cero es de $8.80938114393169 \cdot\ 10^{30}$ m aunque en realidad tiende a infinito.

A continuación, en la figura 36 podemos apreciar que claramente, la órbita es hiperbólica.

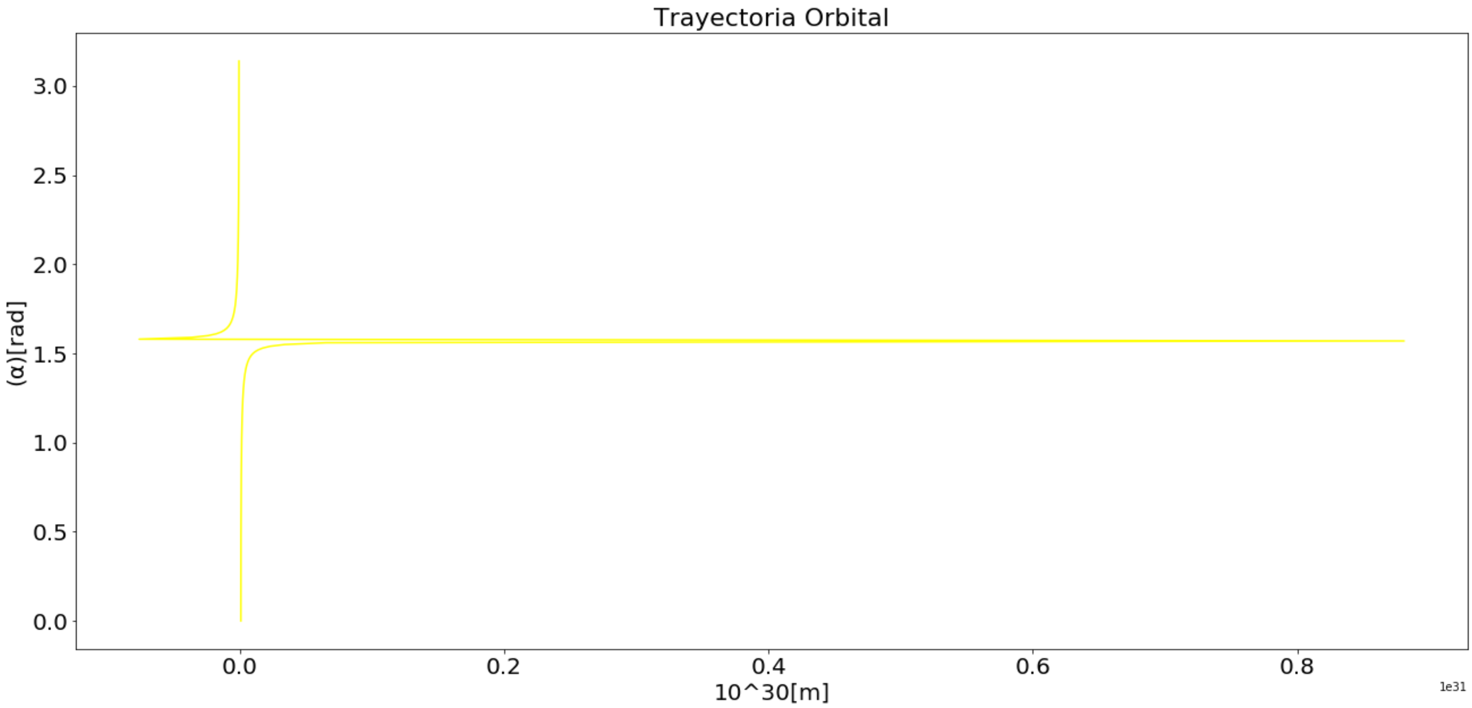


Figura 36. Trayectoria Orbital.